PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

1° λ désignant une constante réelle donnée, calculer la solution générale sur $\mathbb{R}$, $x \dashrightarrow z(x)$, de l'équation différentielle :

$$z'' - \lambda z = 0$$

(on étudiera les trois cas : $\lambda = \omega^2$, $\lambda = 0$, $\lambda = -\omega^2$ ($\omega > 0$ donné) et dans chaque cas, on exprimera la solution générale à l'aide de fonctions à valeurs réelles).

2° Pour quelles valeurs de λ cette équation différentielle a-t-elle des solutions (différentes de la fonction nulle) vérifiant les conditions :

$$z(0) = 0 \; ; \quad z(l) = 0$$

où l est un réel donné, strictement positif? Donner les solutions correspondant à chacune de ces valeurs de λ.

II

Dans ce qui suit, $C(l)$ est l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $[0, l]$ de la droite réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[0, l]$.

L'addition des fonctions et le produit d'une fonction par un scalaire réel, font de cet ensemble, un espace vectoriel sur le corps des réels.

1° A tout couple (g, h) d'éléments de l'espace vectoriel $C(l)$, on associe le nombre :

$$< g, h > = \int_0^l g(x)\, h(x)\, dx.$$

Vérifier qu'on définit ainsi sur cet espace un produit scalaire proprement euclidien, la norme associée étant définie sur $C(l)$ par :

$$h \dashrightarrow \| h \| = \sqrt{\int_0^l h^2(x)\, dx}.$$

2° Montrer que, dans l'espace $C(l)$, la suite de fonctions $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x \dashrightarrow s_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$ est orthogonale. Calculer, pour tout n, la norme de s_n.

3° A toute suite $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels, on associe la suite de fonctions $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} b_k s_k .$$

φ désignant une fonction appartenant à l'espace $C(l)$, calculer pour tout n, $\| \varphi - g_n \|^2$. Exprimer la différence $\| \varphi - g_n \|^2 - \| \varphi \|^2$ en fonction de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ et des coefficients :

$$\beta_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

Quelle valeur doit-on donner à chacun des coefficients b_k pour que la norme de $(\varphi - g_n)$ soit minimum?

4° Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des fonctions définies sur $[0, l]$ par :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Démontrer que la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$$

est convergente et que sa somme est au plus égale à $\frac{2}{l} \| \varphi \|^2$.

5° On admettra que la suite numérique $\{ \| \varphi - \varphi_n \| \}$ est convergente et a pour limite 0. Exprimer alors sous forme d'intégrale la somme de la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$$

III

On désigne par $C_2(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, pourvues de dérivées partielles continues d'ordres 1 et 2.

1° Soit T l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$(u, v) \dashrightarrow (x, y) = T(u, v), \quad \text{où} \quad x = \frac{v + u}{2} \quad y = \frac{v - u}{2}$$

F étant la fonction composée : $F = f \circ T$, vérifier qu'elle admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

que l'on exprimera en fonction des dérivées partielles de f, et qu'elle appartient à $C_2(\mathbb{R}^2)$.

2° Démontrer que l'application 0 de $C_2(\mathbb{R}^2)$ dans lui-même définie par :

/ / /

×88×
E.N.S.I. M 1977

$$f \longrightarrow \theta(f) = F = f \circ T$$

est un automorphisme.

3° L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ appartenant à $C_2(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

est-il un sous-espace vectoriel de $C_2(\mathbb{R}^2)$? Quelle est son image $\mathcal{E}' = \theta(\mathcal{E})$ par l'automorphisme θ ?

4° *a.* Trouver toutes les fonctions $(u, v) \longrightarrow F(u, v)$ appartenant à $C_2(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant, en tout point (u, v) de $\mathbb{R}^2$ l'équation :

$$(E') \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

b. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g_1(x - y) + g_2(x + y)$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions numériques quelconques dans l'espace vectoriel $C_2(\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et pourvues de dérivées d'ordres 1 et 2 continues.

5° φ étant une fonction appartenant à l'espace $C_2(\mathbb{R})$ on cherche une fonction $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$, solution dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation (E), et vérifiant les conditions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Démontrer l'unicité et l'existence d'une telle fonction en précisant l'expression de $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

IV

Dans ce qui suit, l représente un réel donné, strictement positif.

1° Soit f_1 et f_2 deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, différentes de la fonction nulle et appartenant à $C_2(\mathbb{R})$; à quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent-elles satisfaire pour que la fonction $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

soit solution de l'équation (E) donnée au III 3° et vérifie la proposition suivante :

$$(\mathfrak{L}) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = f(l, y) = 0.$$

2° Utilisant les résultats de la partie I, donner toutes les fonctions f_1 et f_2 répondant à la question, ainsi que les fonctions f correspondantes.

3° Soit φ une fonction appartenant à l'espace $C(l)$ définie dans la partie II, pourvue de dérivées continues d'ordres 1 et 2 et telle que

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

On se propose d'étudier l'existence d'une fonction $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ solution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}^2$, vérifiant la proposition $(\mathfrak{L})$ ainsi que la proposition :

$$(\mathfrak{J}) \qquad \forall x \in [0, l], f(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Pour cela, on introduit la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ des fonctions ainsi définies sur $\mathbb{R}$:

$$x \longrightarrow \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \text{où} \quad \beta_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx.$$

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $f_n \in C_2(\mathbb{R}^2)$ combinaison linéaire de solutions du type étudié dans IV. 1° et 2°, vérifiant (E) et $(\mathfrak{L})$, ainsi que la proposition :

$$(\mathfrak{J}_n) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x, 0) = \varphi_n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

b. Utilisant les résultats de la question III, prouver l'unicité de f_n et donner une nouvelle expression de $f_n(x, y)$.

4° On admettra que pour tout $x \in [0, l]$, la suite numérique $\{\varphi_n(x)\}$ a pour limite $\varphi(x)$ et l'on posera pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^*(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

a. La fonction φ^* appartient-elle à $C_2(\mathbb{R})$?

b. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \lim_{n \to \infty} f_n(x, y).$$

c. Vérifier que la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi^*(x - y) + \varphi^*(x + y)]$$

satisfait aux conditions $(\mathfrak{J})$ et $(\mathfrak{L})$. Appartient-elle en général à l'espace $C_2(\mathbb{R}^2)$, et vérifie-t-elle en général l'équation (E) en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? A quelles conditions doit satisfaire la fonction φ pour qu'il en soit ainsi?

FIN

×89×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail